

模型误差对非圆信号测向 MUSIC 算法性能的影响

刘 剑¹, 于红旗², 黄知涛², 周一宇²

(1. 空军工程大学 电讯工程学院, 陕西西安 710077; 2. 国防科技大学 电子科学与工程学院, 湖南长沙 410073)

摘 要: 近年来, 针对非圆信号的测向算法已陆续提出, 对这些算法的渐近性能及 Cramer Rao 界的分析也见报道, 但仍未涉及模型误差对此类算法影响的分析. 本文概括介绍了用于非圆信号测向的 MUSIC (Multiple Signal Classification) 算法, 对其空间谱函数进行一阶泰勒展开, 得到了测向误差的表达式, 从而求得测向均方误差统计意义上的表达式. 仿真实验验证了推导的正确性, 并由理论结果分析了模型误差条件下测向误差与角度间隔和非圆相位差的关系.

关键词: 阵列信号处理; 测向; 模型误差; 非圆信号; MUSIC

中图分类号: TN911. 7 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2008) 12-2280-05

Performance Analysis of the MUSIC Algorithm for Noncircular Signals with Modeling Errors

LIU Jian¹, YU Hong qi², HUANG Zhi-tao², ZHOU Yi-yu²

(1. Telecommunication Engineering Institute, Airforce Engineering University, Xi'an, Shaanxi 710077, China;

2. School of Electronic Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha, Hunan 410073, China)

Abstract: In recent years, a number of direction finding algorithms for noncircular signals are proposed. The asymptotic performance and Cramer Rao Bound (CRB) have been analyzed in the literatures. However, the robustness of these algorithms with modeling errors is out of range of the published papers. In this paper, the MUSIC algorithm for noncircular signals is introduced. The closed form expression of mean square error is obtained from the first order perturbation expansion of the spatial spectrum function. The simulation results validate our analysis. The robustness to the angular separation and the noncircularity phase with modeling errors is analyzed by virtue of the analytical results.

Key words: array signal processing; direction finding; modeling errors; noncircular signals; MUSIC (Multiple Signal Classification)

1 引言

以 MUSIC 算法^[1]为代表的子空间类测向算法由于提高了阵列测向精度并可广泛应用于雷达、声纳及通信等领域, 一经提出便引起了广泛关注. 实际应用中, 信号下变频到基带后, 由同相和正交分量可得复信号, 而依据其统计特性的不同可以分为圆信号和非圆信号^[2], 经典 MUSIC 算法是针对圆信号提出的. 近年来, 对 BPSK 等非圆信号测向受到越来越多的关注, 陆续提出了大量非圆信号测向算法. 1998 年, Galy 等最先提出了非圆信号测向 MUSIC 算法 (NC-MUSIC: MUSIC algorithm for non-circular signals)^[3], 随后, Charge 于 2001 年针对均匀线阵提出了该算法的求根解法^[4], Haardt 于 2004 年提出了将

酉变换用于非圆信号测向的 ESPRIT 算法^[5]. 通过仿真, 验证了这些算法都可以对多于阵元数的信号进行测向, 并提高了分辨力和测向精度^[6], 而 Delmas 和 Abeida 则证明了 MUSIC 类测向算法的渐近性能及其 Cramer-Rao 界 (CRB)^[7,8]. Romer 等也对非圆信号测向的 CRB 进行了分析^[9].

以上算法和分析均假设阵列为精确校正的, 即不存在模型误差, 而实际中阵列经过校正仍会存在一定误差, 这将对测向性能产生影响. 本文研究了 NC-MUSIC 算法对模型误差的适应性, 通过对其空间谱函数的一阶泰勒展开, 得到了测向误差的表达式, 从而求得测向均方误差统计意义上的表达式. 仿真结果验证了推导的正确性.

2 信号模型及非圆信号 MUSIC 测向算法

2.1 信号模型

假设有 D 个不相关窄带信号入射到 M 元阵列上, 信号入射方向与阵列共平面, 阵列位于远场, 阵元为全向的. 文中认为信号数 D 已知或已估计得到了. 上标“*”表示共轭, “T”表示转置, “H”表示共轭转置, “+”表示矩阵伪逆. 阵列输出矢量为

$$\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_M(t)]^T = \mathbf{A}s(t) + \mathbf{n}(t) \quad (1)$$

式中 $s(t) = [s_1(t), s_2(t), \dots, s_D(t)]^T$ 为信号矢量, $\mathbf{n}(t) = [n_1(t), n_2(t), \dots, n_M(t)]^T$ 为噪声矢量, $\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_D)]$ 为导向矩阵, 其中 $\mathbf{a}(\theta) = [e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}(d_{x,i}\cos\theta + d_{y,i}\sin\theta)}, \dots, e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}(d_{x,M}\cos\theta + d_{y,M}\sin\theta)}]^T$ 为导向矢量, λ 为波长, $(d_{x,i}, d_{y,i})$ 为阵元 i 的坐标(假设阵元 1 为参考阵元, 位于原点, 即 $d_{x,1} = 0, d_{y,1} = 0$). 假设信号为不相关的平稳的零均值随机过程, 信号 $s_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, D$) 的功率为 $\sigma_{s_i}^2$, 噪声为复圆高斯白噪声, 每个阵元上的噪声功率均为 σ_n^2 . 以下分析中, 为书写方便, 在不至于混淆的地方将时间 t 省略.

2.2 非圆信号的定义及表示

本文对非圆信号采用二阶定义. 对于信号 s , 如果其任意旋转 $se^{j\varphi}$ 的一阶和二阶统计特性具有旋转不变性, 即

$$E\{se^{j\varphi}\} = E\{s\}, \quad (2)$$

$$E\{se^{j\varphi}(se^{j\varphi})^*\} = E\{ss^*\}, \quad (3)$$

$$E\{se^{j\varphi} \cdot se^{j\varphi}\} = E\{ss\}, \quad (4)$$

则称 s 为圆信号. 本文假设信号为零均值的, 所以 $E\{s\} = 0$, 式(2)成立; 式(3)成立是显然的; 式(4)若成立则 $E\{ss\} = 0$. 测向中信号不恒为零, 所以 $E\{ss^*\} \neq 0$. 于是 s 为圆信号等价于 $E\{s\} = 0, E\{ss^*\} \neq 0$ 且 $E\{ss\} = 0$. 如果 $se^{j\varphi}$ 的一阶和二阶统计特性不具有旋转不变性, 即 $E\{ss\} \neq 0$, 则称 s 为非圆信号. 经典测向算法是针对圆信号设计的, 没有利用 $E\{ss\}$ 中的信息, 非圆信号测向算法同时利用 $E\{ss^*\}$ 和 $E\{ss\}$, 增加了信息利用率, 提高了算法性能.

对任意信号 s , 有^[6]

$$E\{s^2\} = \rho e^{j\phi} E\{ss^*\} = \rho e^{j\phi} \sigma_s^2 \quad (5)$$

式中 ϕ 为非圆相位, ρ 为非圆率, 由 Cauchy-Schwartz 不等式得 $0 \leq \rho \leq 1$. 显然, 当 $0 \leq \rho \leq 1$ 时信号是非圆的. ρ 由信号形式决定, 一旦信号形式确定则 ρ 就确定了, 对于理想 BPSK 信号, $\rho = 1$. 可以证明: 非圆率为 1 的信号总可以由实信号的移相得到. 本文只研究 $\rho = 1$ 的情况, 也就是所谓的狭义非圆信号情况^[9]. 此时, 非圆信号矢量 s 可写成如下形式^[5,9]

$$s = \Phi^{1/2} s_0 \quad (6)$$

式中, $s_0 = [s_{0,1}, s_{0,2}, \dots, s_{0,D}]^T \in \mathbf{R}$, $s_{0,i}$ 为信号 s_i 对应的零初相实信号, 对角矩阵 $\Phi^{1/2} = \text{diag}\{e^{j\phi/2}\}_{i=1}^D$, $\phi/2$ 为信号 s_i 的初相.

2.3 用于非圆信号测向的 MUSIC 算法

对于非圆信号, 可将阵列输出扩展为^[5]

$$\mathbf{x}_E = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_j^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{s}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{n}^* \end{bmatrix} \quad (7)$$

式中, 上标“*”表示共轭. 于是, 扩展协方差矩阵为

$$\mathbf{R} = E\{\mathbf{x}_E \mathbf{x}_E^H\} = \mathbf{B} \Gamma_S \mathbf{B}^H + \sigma_n^2 \mathbf{I}_{2M} \quad (8)$$

式中, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^* \end{bmatrix} \triangleq [\mathbf{b}(\theta_1, \phi_1), \mathbf{b}(\theta_2, \phi_2), \dots, \mathbf{b}(\theta_D, \phi_D)]$, $\mathbf{b}(\theta, \phi) \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{a}(\theta) \\ \mathbf{a}^*(\theta) e^{-j\phi} \end{bmatrix}$, $\Gamma_S = E\{ss^H\}$. 对 \mathbf{R} 进行特征分解,

$$\mathbf{R} = \mathbf{U} \Sigma \mathbf{U}^H \quad (9)$$

记 $2M-D$ 个小特征值对应的特征矢量组成矩阵 \mathbf{U}_n , 于是可由下式的极小值来求得 DOA:

$$f(\theta, \phi) = \mathbf{b}^H(\theta, \phi) \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \mathbf{b}(\theta, \phi) \quad (10)$$

将式(10)写为

$$f(\theta, \phi) = \mathbf{q}^H \mathbf{M}(\theta) \mathbf{q} \quad (11)$$

式中, $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-j\phi} \end{bmatrix}$,

$$\mathbf{M}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{U}_{n1} \mathbf{U}_{n1}^H \mathbf{a}(\theta) & \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{U}_{n1} \mathbf{U}_{n2}^H \mathbf{a}^*(\theta) \\ \mathbf{a}^T(\theta) \mathbf{U}_{n2} \mathbf{U}_{n1}^H \mathbf{a}(\theta) & \mathbf{a}^T(\theta) \mathbf{U}_{n2} \mathbf{U}_{n2}^H \mathbf{a}^*(\theta) \end{bmatrix},$$

$\mathbf{U}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{n1} \\ \mathbf{U}_{n2} \end{bmatrix}$, 且 \mathbf{U}_{n1} 和 \mathbf{U}_{n2} 具有相同的行数. 可以证

明^[6]: $\mathbf{U}_{n2}^H \mathbf{U}_{n2} = \mathbf{U}_{n1} \mathbf{U}_{n1}^H$. 于是由式(10)可得非圆信号测向 MUSIC 算法的空间谱函数^[4,6]

$$f(\theta) = \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{U}_{n1} \mathbf{U}_{n1}^H \mathbf{a}(\theta) - \|\mathbf{a}^T(\theta) \mathbf{U}_{n2} \mathbf{U}_{n1}^H \mathbf{a}(\theta)\| \quad (12)$$

或

$$f(\theta) = \det\{\mathbf{M}(\theta)\} = [\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{U}_{n1} \mathbf{U}_{n1}^H \mathbf{a}(\theta)]^2 - \|\mathbf{a}^T(\theta) \mathbf{U}_{n2} \mathbf{U}_{n1}^H \mathbf{a}(\theta)\|^2 \quad (13)$$

3 模型误差对非圆信号 MUSIC 算法性能的影响

实际应用中, 如果阵列流形已确定, 则算法性能主要受限于模型误差(包括阵元位置校准的残余误差, 接收链路中幅度和相位特性与其标称值之间的误差等, 表现为导向矢量的误差). 因此有必要计算由这些模型误差引起的估计误差, 研究哪些因素影响算法性能, 其中又有哪些因素对算法性能的影响较大.

3.1 模型误差与噪声子空间的关系^[10]

存在模型误差时导向矢量变为

$$\hat{\mathbf{a}}(\theta) = \mathbf{a}(\theta) + \tilde{\mathbf{a}}(\theta) \quad (14)$$

式中 $\hat{a}(\theta)$ 为存在扰动的导向矢量, $\tilde{a}(\theta)$ 为模型误差矢量. 于是存在模型扰动的扩展导向矢量可写成

$$\hat{b}(\theta, \phi) = \mathbf{b}(\theta, \phi) + \tilde{\mathbf{b}}(\theta, \phi) \quad (15)$$

$$\text{式中 } \tilde{\mathbf{b}}(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{a}}(\theta) \\ \tilde{\mathbf{a}}^*(\theta) \cdot \mathbf{e}^{-j\phi} \end{bmatrix}.$$

为将模型误差对测向的影响分离出来, 假设数据的有限采样效应可以忽略, 即认为扩展协方差矩阵精确已知, 则有

$$\hat{\mathbf{R}} = (\mathbf{B} + \tilde{\mathbf{B}}) \Gamma_s (\mathbf{B} + \tilde{\mathbf{B}})^H + \sigma_n^2 \mathbf{I}_{2M} \quad (16)$$

式中 $\tilde{\mathbf{B}} = [\tilde{\mathbf{b}}(\theta_1, \phi_1), \tilde{\mathbf{b}}(\theta_2, \phi_2), \dots, \tilde{\mathbf{b}}(\theta_D, \phi_D)]$ 为扩展模型误差矩阵.

为建立式(16)的误差项与噪声子空间扰动矩阵 $\tilde{\mathbf{U}}_n$ 的关系, 考察 $\hat{\mathbf{R}}$ 中的噪声特征矢量, 有

$$\hat{\mathbf{R}} \hat{\mathbf{U}}_n = \hat{\mathbf{U}}_n (\sigma_n^2 \mathbf{I}_{2M} + \tilde{\mathbf{\Lambda}}) \quad (17)$$

式中 $\hat{\mathbf{U}}_n$ 为有扰动的噪声特征矢量, $\tilde{\mathbf{\Lambda}}$ 为噪声特征值的扰动量. 将式(16)代入式(17), 忽略二次误差项以及包含 $\mathbf{B}^H \hat{\mathbf{U}}_n = 0$ 的项, 于是得到如下的一阶近似

$$\mathbf{B} \Gamma_s \mathbf{B}^H \tilde{\mathbf{U}}_n + \mathbf{B} \Gamma_s \tilde{\mathbf{B}}^H \hat{\mathbf{U}}_n \approx \hat{\mathbf{U}}_n \tilde{\mathbf{\Lambda}} \quad (18)$$

上式左乘 \mathbf{B}^H 并整理可得

$$\tilde{\mathbf{U}}_n^H \mathbf{B} \approx -\hat{\mathbf{U}}_n^H \tilde{\mathbf{B}} \quad (19)$$

3.2 一阶误差分析

存在模型误差时, 噪声子空间存在扰动, 则式(10)变为

$$\hat{f}(\theta, \phi) = \mathbf{b}^H(\theta, \phi) \hat{\mathbf{U}}_n^H \hat{\mathbf{U}}_n \mathbf{b}(\theta, \phi). \quad (20)$$

对于足够小的模型误差, 忽略误差的高次项, 并忽略包含 $\mathbf{B}^H \hat{\mathbf{U}}_n = 0$ 的项, 可以得到如下各式

$$\begin{aligned} \hat{f}'_{\theta} &\triangleq \frac{\partial \hat{f}(\theta, \phi)}{\partial \theta} = 2 \operatorname{Re} \{ \mathbf{b}'_0{}^H \hat{\mathbf{U}}_n^H \hat{\mathbf{U}}_n \mathbf{b}(\theta, \phi) \} \\ &\approx 2 \operatorname{Re} \{ \mathbf{b}'_0{}^H \hat{\mathbf{U}}_n \tilde{\mathbf{U}}_n^H \mathbf{b}(\theta, \phi) \} \approx -2 \operatorname{Re} \{ \mathbf{b}'_0{}^H \hat{\mathbf{U}}_n \tilde{\mathbf{U}}_n^H \mathbf{b}(\theta, \phi) \} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \hat{f}'_{\phi} &\triangleq \frac{\partial \hat{f}(\theta, \phi)}{\partial \phi} = 2 \operatorname{Re} \{ \mathbf{b}'_{\phi}{}^H \hat{\mathbf{U}}_n \hat{\mathbf{U}}_n \mathbf{b}(\theta, \phi) \} \\ &\approx 2 \operatorname{Re} \{ \mathbf{b}'_{\phi}{}^H \hat{\mathbf{U}}_n \tilde{\mathbf{U}}_n^H \mathbf{b}(\theta, \phi) \} \approx -2 \operatorname{Re} \{ \mathbf{b}'_{\phi}{}^H \hat{\mathbf{U}}_n \tilde{\mathbf{U}}_n^H \mathbf{b}(\theta, \phi) \} \end{aligned} \quad (22)$$

$$f''_{\theta, \theta} \triangleq \frac{\partial^2 \hat{f}_{\theta}}{\partial \theta^2} = 2 \mathbf{b}'_0{}^H \hat{\mathbf{U}}_n \hat{\mathbf{U}}_n \mathbf{b}'_0 \quad (23)$$

$$f''_{\phi, \phi} \triangleq \frac{\partial^2 \hat{f}_{\phi}}{\partial \phi^2} = 2 \mathbf{b}'_{\phi}{}^H \hat{\mathbf{U}}_n \hat{\mathbf{U}}_n \mathbf{b}'_{\phi} \quad (24)$$

$$f''_{\theta, \phi} \triangleq \frac{\partial^2 \hat{f}_{\theta}}{\partial \theta \partial \phi} = 2 \operatorname{Re} \{ \mathbf{b}'_0{}^H \hat{\mathbf{U}}_n \hat{\mathbf{U}}_n \mathbf{b}'_{\phi} \} = f''_{\phi, \theta} \triangleq \frac{\partial^2 \hat{f}_{\phi}}{\partial \phi \partial \theta} \quad (25)$$

$$\text{式中 } \mathbf{b}'_0 \triangleq \frac{\partial \mathbf{b}(\theta, \phi)}{\partial \theta}, \mathbf{b}'_{\phi} \triangleq \frac{\partial \mathbf{b}(\theta, \phi)}{\partial \phi}.$$

假设 θ 和 ϕ 为 $f(\theta, \phi)$ 的全局最小值对应的方位角和非圆相位, 则 $(\hat{\theta}, \hat{\phi})$ 满足以下两式

$$\left. \frac{\partial f(\theta, \phi)}{\partial \theta} \right|_{(\theta, \phi) = (\hat{\theta}, \hat{\phi})} = 0 \quad (26)$$

$$\left. \frac{\partial f(\theta, \phi)}{\partial \phi} \right|_{(\theta, \phi) = (\hat{\theta}, \hat{\phi})} = 0 \quad (27)$$

对式(26)和(27)进行一阶泰勒展开, 则有^[6, 10, 11]

$$\begin{cases} \hat{f}'_{\theta} + (\hat{\theta} - \theta) f''_{\theta, \theta} + (\hat{\phi} - \phi) f''_{\theta, \phi} = 0 \\ \hat{f}'_{\phi} + (\hat{\theta} - \theta) f''_{\theta, \phi} + (\hat{\phi} - \phi) f''_{\phi, \phi} = 0 \end{cases} \quad (28)$$

解式(28)可得

$$\hat{\theta} - \theta = \frac{\hat{f}'_{\phi} \cdot f''_{\theta, \phi} - \hat{f}'_{\theta} \cdot f''_{\phi, \phi}}{f''_{\theta, \theta} \cdot f''_{\phi, \phi} - (f''_{\theta, \phi})^2} \quad (29)$$

不失一般性, 假设扰动 $\tilde{a}(\theta)$ 为零均值的, 从而 $\tilde{\mathbf{b}}(\theta, \phi)$ 亦为零均值的, 则由式(29)立即可得 $E\{\hat{\theta} - \theta\} \approx 0$, 于是算法的角度估计均方误差为

$$\begin{aligned} E\{(\hat{\theta} - \theta)^2\} &= \frac{1}{\gamma^2} [(f''_{\phi, \phi})^2 \cdot E\{(\hat{f}'_{\theta})^2\} + (f''_{\theta, \phi})^2 \cdot E\{(\hat{f}'_{\phi})^2\} \\ &\quad - 2(f''_{\theta, \phi} \cdot f''_{\phi, \phi}) \cdot E\{\hat{f}'_{\theta} \hat{f}'_{\phi}\}] \end{aligned} \quad (30)$$

式中 $\gamma \triangleq f''_{\theta, \theta} \cdot f''_{\phi, \phi} - (f''_{\theta, \phi})^2$. 对于两个标量复随机变量 u 和 v , 不难验证^[11]

$$\operatorname{Re}\{u\} \cdot \operatorname{Re}\{v\} = \frac{1}{2} [\operatorname{Re}\{uv\} + \operatorname{Re}\{u^*v\}] \quad (31)$$

所以, 式(30)中的三个期望可表示为

$$E\{(\hat{f}'_{\theta})^2\} = 2 \mathbf{b}'_0{}^H \Pi \mathbf{C}_{b,1} \Pi \mathbf{b}'_0 + 2 \operatorname{Re}\{ \mathbf{b}'_0{}^H \Pi \mathbf{C}_{b,2} \Pi^T \mathbf{b}'_0 \} \quad (32)$$

$$E\{(\hat{f}'_{\phi})^2\} = 2 \mathbf{b}'_{\phi}{}^H \Pi \mathbf{C}_{b,1} \Pi \mathbf{b}'_{\phi} + 2 \operatorname{Re}\{ \mathbf{b}'_{\phi}{}^H \Pi \mathbf{C}_{b,2} \Pi^T \mathbf{b}'_{\phi} \} \quad (33)$$

$$E\{\hat{f}'_{\theta} \hat{f}'_{\phi}\} = 2 \operatorname{Re}\{ \mathbf{b}'_0{}^H \Pi \mathbf{C}_{b,1} \Pi \mathbf{b}'_{\phi} + \mathbf{b}'_0{}^H \Pi \mathbf{C}_{b,2} \Pi^T \mathbf{b}'_{\phi} \} \quad (34)$$

式中, $\Pi = \hat{\mathbf{U}}_n \hat{\mathbf{U}}_n^H = \mathbf{I}_{2M} - \mathbf{B}(\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^H$, $\mathbf{C}_{b,1} = E\{\tilde{\mathbf{b}}(\theta, \phi) \tilde{\mathbf{b}}^H(\theta, \phi)\}$, $\mathbf{C}_{b,2} = E\{\tilde{\mathbf{b}}(\theta, \phi) \tilde{\mathbf{b}}^T(\theta, \phi)\}$.

至此, 只要已知扩展导向矢量扰动的统计特性 $\mathbf{C}_{b,1}$ 和 $\mathbf{C}_{b,2}$, 就可以由式(30)求得测向均方误差.

3.3 模型误差影响的显著性标准

以上分析均假设受扰动的协方差矩阵是精确已知的, 而实际中数据是有限采样的, 协方差矩阵的估计会有一定的偏差. 直观说来, 当快拍数 L 很大时式(30)成立. 问题是, 快拍数多大才能使由数据有限采样引起的误差小于模型误差引起的测向误差. 下面, 比较由模型误差和数据有限采样引起的测向误差.

Abeida 已经给出了有限采样时 NC-MUSIC 算法的均方误差性能^[6], 对于 $\rho = 1$ 的情况, 其渐近表达式如下

$$E\{(\hat{\theta} - \theta)^2\} = \sigma_n^2 \frac{2f''_{\phi, \phi}}{\gamma} [\mathbf{B}^H(\theta, \phi) \mathbf{V} \mathbf{b}(\theta, \phi)] \quad (35)$$

式中, $\mathbf{V} = \mathbf{S}^+ \mathbf{R} \mathbf{S}^+$, $\mathbf{S} = \mathbf{B} \Gamma_s \mathbf{B}^H$.

在此, 假设导向矢量的扰动 $\tilde{a}(\theta)$ 满足: $E\{\tilde{a}(\theta_i) \tilde{a}^H(\theta_j)\} = \sigma_a^2 \delta_{ij} \mathbf{I}_M$, $E\{\tilde{a}(\theta_i) \tilde{a}^T(\theta_j)\} = \mathbf{O}$, $i \leq i, j \leq D$, 则有:

$\mathbf{C}_{b,1} = \sigma^2 \mathbf{I}_{2M}$, $\mathbf{C}_{b,2} = \sigma^2 \mathbf{e}^{-j\phi} \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I}_M \\ \mathbf{I}_M & \mathbf{O} \end{bmatrix}$. 文献[6]已经给出:

$\Pi = \begin{bmatrix} \Pi_1 & \Pi_2 \\ \Pi_2^* & \Pi_1^* \end{bmatrix}$, 于是,

$$E\{(\hat{f}_\theta)^2\} = \sigma^2(f''_{\theta, \theta} + 2e^{-j\phi} \text{Re}\{b_0^H \Pi b_0^*\}) \quad (36)$$

$$E\{(\hat{f}_\phi)^2\} = \sigma^2(f''_{\phi, \phi} + 2e^{-j\phi} \text{Re}\{b_\phi^H \Pi b_\phi^*\}) \quad (37)$$

$$E\{\hat{f}_\theta \cdot \hat{f}_\phi\} = \sigma^2(f''_{\theta, \phi} + 2e^{-j\phi} \text{Re}\{b_0^H \Pi b_\phi^*\}) \quad (38)$$

式中, $\Pi = \begin{bmatrix} \Pi_1 & \Pi_2 \\ \Pi_2^* & \Pi_1^* \end{bmatrix}$, $\Pi_1 = \Pi_1 \Pi_1^H + \Pi_2 \Pi_1^H$, $\Pi_2 =$

$\Pi_1 \Pi_1^H + \Pi_2 \Pi_2^H$. 故式(30)变为

$$E\{(\hat{\theta} - \theta)^2\} = \frac{\sigma^2}{\gamma^2} f''_{\phi, \phi} + \frac{2\sigma^2}{\gamma^2} e^{-j\phi} \text{Re}\{f''_{\phi, \phi} \cdot b_0^H \Pi b_0^*\} + (f''_{\theta, \phi})^2 \cdot b_0^H \Pi b_\phi^* - 2(f''_{\theta, \phi} \cdot f''_{\phi, \phi}) \cdot b_0^H \Pi b_\phi^* \quad (39)$$

对应地, 经典 MUSIC 算法存在同样的模型误差时, 有^[10]

$$E\{(\hat{\theta} - \theta)^2\} = \frac{\sigma^2}{2a^H(\theta) \bar{\Pi} a'(\theta)} \quad (40)$$

式中, $\bar{\Pi} = I_M - A(A^H A)^{-1} A^H$, $a'(\theta) = \frac{da(\theta)}{d\theta}$.

对比式(35)和(39), NC-MUSIC 算法中如果由模型误差引起的测向误差大于由有限采样造成的测向误差, 则

$$\sigma^2 > \sigma_n^2 \cdot \frac{2\gamma^2 f''_{\phi, \phi} \cdot b_0^H(\theta, \phi) \Pi b_0(\theta, \phi)}{\gamma + 2e^{-j\phi} \text{Re}\{f''_{\phi, \phi} \cdot b_0^H \Pi b_0^* + (f''_{\theta, \phi})^2 / f''_{\phi, \phi} \cdot b_\phi^H \Pi b_\phi^* - 2f''_{\theta, \phi} \cdot b_0^H \Pi b_\phi^*\}} \quad (41)$$

4 仿真与分析

本节利用仿真验证前文公式推导的正确性, 然后用理论值研究影响算法性能的因素.

实验 1: 验证理论分析的正确性. 仿真中采用均布 4 元线阵, 阵元间距半波长, 假设两个信号入射到阵列, 信噪比均为 50dB, 快拍数为 500, 模型误差(导向矢量误差)为圆复白的, 其标准差为 0.01745, 对应于没有幅度误差只有相位误差时相位误差的标准差为 1°. 利用 300 次实验的结果统计测向均方根误差(RMSE). 第 $i(i = 1, 2)$ 个入射角的 RMSE 定义为

$\sqrt{\sum_{k=1}^{300} [f_i(\hat{\theta}_i(k)) - \theta_i(k)]^2 / 300}$, 若空间谱只有一个负峰则令两个角的估计值都等于这个负峰对应的角度. 理论 RMSE 的计算采用式(39), 角度间隔定义为 $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$, 非圆相位差定义为 $\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$. 假设信号从 $[85^\circ, 95^\circ]$ 入射到阵列, 图 1 给出的是非圆相位对测向误差的影响. 假设两信号以 90° 对称入射到阵列, 两个信号的初相均为 0. 图 2 给出了角度间隔对测向误差的影响. 图 1 和图 2 只给出了第一个信号的 RMSE, 第二个信号的 RMSE 与第一个信号类似, 不再给出. 需要指出的是, 大量的仿真与理论结果均表明: 当两个信号的角度间隔一

定时, 存在模型误差时 NC-MUSIC 的测向性能只与非圆相位差有关, 与两个信号的初相具体值无关; 而若给定非圆相位差, 则其测向性能只与 $\cos\theta_2 - \cos\theta_1$ 有关, 与入射角的具体值无关. 这与文献[6]的结果类似.

图 1 和图 2 表明, 式(39)给出的理论 RMSE 与实际 RMSE 吻合, 验证了本文分析的正确性. 所以, 下面的图示分析直接采用理论值, 而不再给出仿真值.

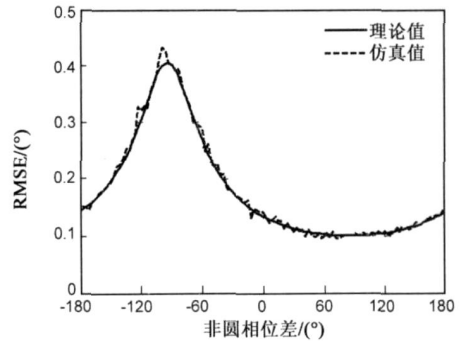


图1 存在模型误差时NC-MUSIC算法的理论及仿真性能1

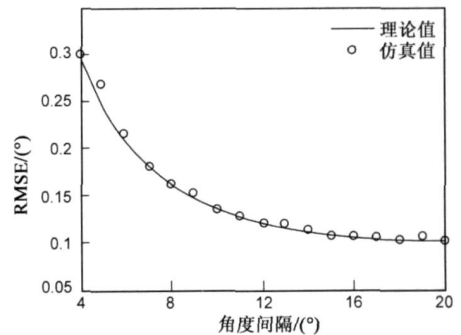


图2 存在模型误差时NC-MUSIC算法的理论及仿真性能2

实验 2: 模型误差对 NC-MUSIC 算法测向性能影响的分析. 假设两个信号从 $[85^\circ, 95^\circ]$ 入射到阵列, 模型误差的标准差为 σ , 图 3 给出了不同模型误差条件下测向误差与非圆相位差的关系. 模型误差越大, 测向误差越大, 这与直观感觉相一致. 而在同一模型误差条件下, 测向误差会随非圆相位差而有所变化. 测向误差最大值点对应的非圆相位差会随 $\cos\theta_2 - \cos\theta_1$ (分析中体现为两个信号的角度间隔) 变化, 且不大于同样条件下 MUSIC 算法的测向误差. 这在后面两个图中得到了验证. 图 4 对应的模型误差的标准差为 0.01745, 模型误差造成的 MUSIC 测向 RMSE 由式(40)求得. 显然, 角度间隔越大测向误差越小, 而且测向误差最大值对应的非圆相位差也与角度间隔有关, 角度间隔为 $10^\circ, 15^\circ, 20^\circ, 25^\circ, 30^\circ$ 时测向误差最大值对应的非圆相位差大约分别为 $94^\circ, 141^\circ, -172^\circ, -126^\circ, -81^\circ$. 此时 NC-MUSIC 与 MUSIC 的 RMSE 相等, 而在其它非圆相位差下 NC-MUSIC 的 RMSE 小于 MUSIC. 图 5 对应的模型误差的标准差仍为 0.01745. 显然, 非圆相位差为 $94^\circ, 141^\circ, -172^\circ, -126^\circ, -81^\circ$ 时, 角度间隔大约在 $10^\circ, 15^\circ, 20^\circ, 25^\circ, 30^\circ$ 时 NC-

MUSIC 算法的测向误差与 MUSIC 算法相等, 这与图 3 和 图 4 的分析相一致.

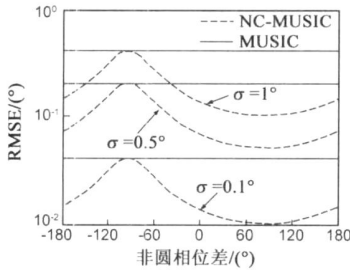


图3 存在模型误差时NC-MUSIC 算法的理论性能1

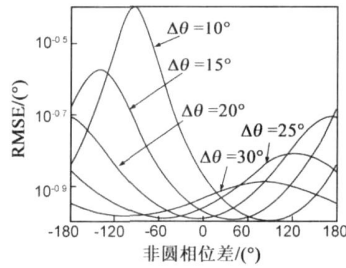


图4 存在模型误差时NC-MUSIC 算法的理论性能2

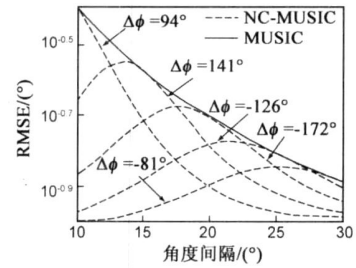


图5 存在模型误差时NC-MUSIC 算法的理论性能3

5 结论

介绍了用于非圆信号测向的 NC-MUSIC 算法, 建立了模型误差与噪声子空间的关系, 对空间谱函数进行一阶泰勒展开, 利用角度和非圆相位估计值处空间谱函数偏导为零的性质得到了测向均方差表达式, 并与有限采样点造成的测向误差相比较, 给出了模型误差造成显著影响的条件. 仿真结果验证了理论分析的正确性, 并利用理论值分析了模型误差条件下测向误差与角度间隔和非圆相位差的关系.

参考文献:

[1] Schmidt R O. Multiple emitter location and signal parameter estimation [J] . IEEE Trans AP, 1986, 34(3): 276- 280.

[2] Pcinbono B. On circularity [J] . IEEE Trans SP, 1994, 42(12): 3473- 3482.

[3] Gouyon P, Adnet C, Galy J. Localisation angulaire de signaux non circulaires [J] . Traitement du Signal, 1998, 15(1): 17- 23.

[4] Chargé P, Wang Y, Saillard J. A non circular sources direction finding method using polynomial rooting [J] . Signal Process, 2001, 81(6): 1765- 1770.

[5] Haardt M, Romer F. Enhancements of unitary ESPRIT for non circular sources [A] . ICASSP2004 2 [C] . Canada: IEEE, 2004. 101- 104.

[6] Abeida H, Delmas J P. MUSIC-like estimation of direction of arrival for noncircular sources [J] . IEEE Trans SP, 2006, 54(7): 2678- 2690.

[7] Delmas J P, Abeida H. Stochastic Cramer Rao bound for non circular signals with applications to DOA estimation [J] . IEEE Trans SP, 2004, 52(11) : 3192- 3199.

[8] Abeida H, Delmas J P. Gaussian Cramer Rao bound for direction estimation of noncircular signals in unknown noise fields [J] . IEEE Trans SP, 2005, 53(12): 4610- 4618.

[9] Romer F, Haardt M. Deterministic Cramer-Rao Bounds for strict sense non circular sources [A] . Proc International ITG/ IEEE Workshop on Smart Antennas (WSA' 07) [C] . Austria: IEEE, 2007. 1- 5.

[10] Swindlehurst A L, Kailath T. A performance analysis of subspace based methods in the presence of model errors, Part I: The MUSIC algorithm [J] . IEEE Trans SP, 1992, 40(7) : 1758 - 1774.

[11] Stoica P, Nehorai A. MUSIC, maximum likelihood, and Cramer-Rao bound [J] . IEEE Trans ASSP, 1989, 37(5) : 720 - 741.

作者简介:



刘 剑 男, 1978 年出生于山东省潍坊市, 空军工程大学讲师, 研究方向为阵列信号处理、现代通信系统.
E mail: sdwliuj@163.com



于红旗 男, 1978 年出生于河南省开封市, 国防科技大学讲师, 研究方向为阵列信号处理、综合电子战. E mail: dr. yhq@163.com

黄知涛 男, 1976 年出生于湖北省荆州市, 国防科技大学副教授, 主要研究方向为循环平稳信号处理、综合电子战. E mail: talden@yahoo.com.cn

周一宇 男, 1948 年出生于上海市, 国防科技大学教授, 博士生导师, 主要研究方向为综合电子战. E-mail: dr406@nudt.edu.cn